Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Физический факультет

Кафедра физики частиц и космологии

# Квазиклассическое описание рождения магнонов в неоднородном магнитном поле

Курсовая работа
студента 443 группы
Чиркова Владислава Игоревича

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., с.н.с. ОТФ ИЯИ РАН
Сатунин Пётр Сергеевич

Москва 2025

# Содержание

# 1 Введение

## 1.1 Эффект Швингера

Из статьи [3] знаем, что много лет назад Швингер вывел выражение для скорости рождения скалярных электрон-позитронных пар во внешнем электрическом поле:

$$\Gamma = \frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n+1}}{n^2} \exp\left[-\frac{\pi m^2}{eE} n\right]. \tag{1}$$

Этот результат был получен путём суммирования диаграмм Фейнмана, описывающих взаимодействие однопетлевых электронных контуров с внешним полем. Уравнение (1) справедливо только для слабой связи ($\alpha \ll 1$) и корректируется диаграммами высших порядков. Полное выражение для $\Gamma$ должно иметь следующий вид:

$$\Gamma = (eE)^2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{2n} f_n\left(\frac{eE}{m^2}\right). \tag{2}$$

В случае слабого внешнего поля ($eE \ll m^2$) и слабой связи формула упрощается до:

$$\Gamma = \frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} e^{-\pi m^2/eE}. \tag{3}$$

В одной из статей была рассчитана скорость рождения пар магнитных монополей в модели Джорджи-Глэшоу:

$$\Gamma_M = \frac{(gB)^2}{(2\pi)^3} \exp\left[-\frac{\pi M^2}{gB} + \frac{1}{4} g^2\right], \tag{4}$$

где $M$ — масса монополя, а $g = 4\pi/e$ — магнитный заряд. Этот результат, полученный методом инстантонов, формально напоминает формулу Швингера. Можно показать, что для слабых полей и произвольной связи выражение (2) сводится к:

$$\Gamma = \frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} \exp\left[-\frac{\pi m^2}{eE} + \frac{1}{4} e^2\right]. \tag{5}$$

Рассмотрим производство электрон-позитронных пар, случай слабой связи. Скорость производства пар связана с мнимой частью плотности вакуумной энергии:

$$\delta\Gamma = -2 \,\mathrm{Im}\, \ln \int (dA)(d\phi)\, e^{-S}, \tag{6}$$

где $S$ — евклидово действие во внешнем поле:

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + |(\partial_\mu + ieA_\mu + ieA_\mu^{\text{ex}})\phi|^2 + m^2|\phi|^2\right]. \tag{7}$$

После интегрирования по полю $\phi$ получаем:

$$\delta\Gamma = -2\,\mathrm{Im}\,\ln \int (dA)\, e^{-S_{\mathrm{eff}}}, \tag{8}$$

где

$$S_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}^2 + \mathrm{tr}\,\ln\left[-(\partial_\mu + ieA_\mu + ieA_\mu^{\mathrm{ex}})^2 + m^2\right]. \tag{9}$$

Метод «собственного времени» позволяет выразить след через интеграл по путям:

$$\delta\Gamma = \mathrm{Im}\int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-(m^2/2)T} \int [dx] \exp\left(-\frac{1}{2T}\int_0^1 d\tau\, \dot{x}^2 + ie\oint A_\mu^{\mathrm{ex}} dx_\mu\right). \tag{10}$$

Условие стационарности действия $S = m\sqrt{\int \dot{x}^2} + ie\oint A_\mu^{\mathrm{ex}} dx_\mu$ приводит к уравнению для мировых линий инстантонов:

$$\frac{m\ddot{x}_\mu}{\sqrt{\int \dot{x}^2\, d\tau}} = -eF_{\mu\nu}\dot{x}_\nu. \tag{11}$$

Окончательное уравнение для worldline инстантонов получается заменой $\tau = Tu$ во время вывода, то есть:

$$m\frac{\ddot{x}_\mu}{\int_0^1 \dot{x}^2\, du} = ieF_{\mu\nu}\dot{x}_\nu, \tag{12}$$

Периодические решения этого уравнения — окружности в плоскости $x_3$-$x_4$:

$$x_\mu^{\mathrm{cl}} = R(0, 0, \cos 2\pi\tau, \sin 2\pi\tau), \quad R = \frac{m}{eE}, \quad S = \frac{\pi m^2}{eE}. \tag{13}$$

Для случая произвольной связи учитывается взаимодействие петель через обмен фотонами. После перенормировки заряда $e$ и массы $m$ скорость производства пар принимает вид:

$$\Gamma = \frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} \exp\left[-\frac{\pi m^2}{eE} + \frac{1}{4}e^2\right]. \tag{14}$$

Краткодействующие поправки (например, массовая перенормировка) не влияют на ведущий экспоненциальный множитель для слабых полей.

## 1.2 Магнонная модель

Рассмотрим модель магнонов. Заметим, что есть аналогии с электрическим полем и с рождением электрон/позитронных пар. Задача данной работы будет состоять в том, чтобы воспользоваться уравнением для Worldline инстантонов и рассмотреть пространственно неоднородное поле $B(x)$. Для нахождения уравнений движения и для решения задач потребуется несколько условий. Из статьи [1] находим связь между магнитным полем и электрическим: $E(x) = -\frac{\partial}{\partial x}B(x)$, то есть рождение магнонов в магнитном поле $B(x)$ эквивалентно рождению электронов в скалярном электрическом поле $E(x) = -\frac{\partial}{\partial x}B(x)$. И наоборот: если знаем рождение в электрическом поле $E(x)$, то можем перейти к модели с магнонами, так как известны результаты стационарных решений для электрического поля [2]. Это и будет доказано в работе далее.

Эффективный квадратичный лагранжиан можно представить в следующем виде [1]:

$$\mathcal{L} = f_t^2(D_0\Phi^* D_0\Phi - \Delta\Phi^*\Phi) - f_s^2\delta_{ij}\partial_i\Phi^*\partial_j\Phi \tag{15}$$

$$D_0\Phi = (\partial_0 + iU)\Phi, D_0\Phi^* = (\partial_0 - iU)\Phi^* \tag{16}$$

Для лагранжиана (15) длинные производные были написаны выше. Здесь $U = \mu B$, а также в этой модели $A_0 = B$. Кроме того, здесь $\Delta = m$ - энергетическое расстояние, играет роль массового слагаемого, а константа $v_s = \frac{f_s}{f_t}$ играет роль эффективной скорости света в среде. Для данных величин в электрическом поле эти значения относительно малы [1]: $\Delta \approx 1$ МэВ и $v_s \approx 60$ м/с.

То есть выражение при учёте наших аналогий $|(\partial_0 - i\mu B)\Phi|^2$ для магнитного поля эквивалентно $|(\partial_\mu - ieA_\mu)\Phi|^2$ для электрического поля. В этом случае магнонные скалярные поля $\Phi(x), \Phi^*(x)$ являются флуктуациями над основным состоянием, а соответствующее волновое уравнение будет являться модификацией уравнения Клейна-Гордона:

$$(D_0^2 - v_s^2\delta^{ij}\partial_i\partial_j + \Delta^2)\Phi(x) = 0 \tag{17}$$

$$D_0\Phi = (\partial_0 + iU)\Phi, U = \mu B(x)$$

В электрическом поле считаем случай однородным, то есть $A_0 = E \cdot x$. При этом $E_x = \partial_x A_0 - \partial_0 A_x = E$. Рассмотрим два случая пространственной неоднородности, когда $E = \text{const}$ (в этом случае $B(x) = \beta x$, где $\beta = \partial_x B$ - постоянный градиент магнитного поля) и случай $E = \frac{E_0}{\cosh^2(kx)}$ (что соответствует $B = B_0\tanh(kx)$).

# 2 Основная часть

## 2.1 Пространственно неоднородный случай

Рассматриваем $B(x) = B_0 + (\partial_x B)x$, где постоянный градиент $\partial_x B = \beta$ (из статьи [1]). В модели магнонов градиент магнитного поля эквивалентен эффективному электрическому полю $E = -\beta$.
Уравнения движения для Worldline инстантонов (12) в евклидовом пространстве-времени из вариационного принципа для действия [2], [3] $S = mv_s\sqrt{\int_0^1(\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2)du} + i\mu\int_0^1 B(x)\dot{x}_4 du$, где $v_s = \frac{f_s}{f_t}$ — эффективная скорость света, принимают следующий вид:

$$\frac{\ddot{x}_3}{\sqrt{\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2}} = i\mu\beta v_s\dot{x}_4, \quad \frac{\ddot{x}_4}{\sqrt{\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2}} = -i\mu\beta v_s\dot{x}_3. \tag{18}$$

Введем параметр $a = \sqrt{\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2} = \text{const}$. Тогда:

$$\ddot{x}_3 = i\mu\beta v_s a\dot{x}_4, \quad \ddot{x}_4 = -i\mu\beta v_s a\dot{x}_3. \tag{19}$$

Другой вариант записи:

$$\dot{x}_3 = av_s\sqrt{1 + \left(\frac{\mu(\partial_x B)\, x_3}{m}\right)^2}, \quad \dot{x}_4 = -i\frac{\mu v_s a}{m}(\partial_x B)\, x_3. \tag{20}$$

Здесь $a$ - константа, определённая периодичностью. Решения для магнитного поля будут выглядеть аналогично решениям для электрического поля [2]. Перейдем к комплексной переменной $z(u) = x_3(u) + ix_4(u)$. Уравнения сводятся к виду:

$$\ddot{z} = -\mu\beta a v_s\dot{z}. \tag{21}$$

Решение:

$$\dot{z}(u) = Ce^{-i\mu\beta a v_s u}. \tag{22}$$

Интегрируем:

$$z(u) = \frac{C}{i\mu\beta a v_s}e^{-i\mu\beta a v_s u} + D. \tag{23}$$

Учитывая периодичность $z(u+1) = z(u)$, получаем:

$$\mu\beta a v_s = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{24}$$

Таким образом итоговая периодическая константа:

$$a = \frac{2\pi n}{\mu\beta v_s}.$$

После разделения $z(u)$ на действительную и мнимую части можем получить явный вид траектории:

$$x_3(u) = \frac{m}{\mu(\partial_x B)v_s}\cos(2\pi n u) = \frac{m}{\mu\beta v_s}\cos(2\pi n u), \tag{25}$$

$$x_4(u) = \frac{m}{\mu(\partial_x B)v_s}\sin(2\pi n u) = \frac{m}{\mu\beta v_s}\sin(2\pi n u). \tag{26}$$

Здесь $n \in \mathbb{Z}^+$, а радиус окружности: $\frac{m}{\mu(\partial_x B)v_s}$. Произведём проверку решения:

$$\dot{x}_3 = -2\pi n\frac{m}{\mu\beta v_s}\sin(2\pi n u), \quad \dot{x}_4 = 2\pi n\frac{m}{\mu\beta v_s}\cos(2\pi n u),$$

$$a = \sqrt{\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2} = \frac{2\pi n m}{\mu\beta v_s}.$$

Рассмотрим инстантонное стационарное действие $S_0$ (по методу, описанному в [2] и [3]). Подставляем решения в действие:

$$S_0 = m v_s\sqrt{\int_0^1(\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2)du} + i\mu\int_0^1 B(x)\dot{x}_4 du. \tag{27}$$

Рассмотрим два члена выписанного выражения по отдельности. Первый член:

$$m\sqrt{a^2} = ma = \frac{2\pi n m^2}{\mu\beta v_s}. \tag{28}$$

Второй член не такой тривиальный, нужно произвести интегрирование с учётом граничных условий:

$$i\mu\int_0^1(B_0 + \beta x_3)\dot{x}_4 du = i\mu B_0\int_0^1 \dot{x}_4 du + i\mu\beta\int_0^1 x_3\dot{x}_4 du. \tag{29}$$

$\int_0^1 \dot{x}_4 du = x_4(1) - x_4(0) = 0$ (периодичность).
$\int_0^1 x_3\dot{x}_4 du = -\int_0^1 \dot{x}_3 x_4 du = -\frac{m^2}{(\mu\beta)^2 v_s}\pi n$. (было произведено интегрирование по частям и перекидывание производной).
Итоговое действие:

$$S_0 = \frac{2\pi n m^2}{\mu\beta v_s} - i\mu\beta\cdot\left(-\frac{\pi n m^2}{\mu^2\beta^2 v_s}\right) = \frac{\pi n m^2}{\mu\beta v_s}. \tag{30}$$

Это действие приводит к экспоненциальному подавлению образования магнон-антимагнонных пар с шириной, записанной ниже:

$$\operatorname{Im}\Gamma \sim e^{-S_0}.$$

Или же можно записать следующим образом:

$$\operatorname{Im}\Gamma \sim \exp\left(-\frac{\pi m^2}{\mu(\partial_x B)v_s}\right). \tag{31}$$

Интерпретировать полученные результаты для постоянного градиента магнитного поля (эквивалентного постоянному электрическому полю) можем следующим образом:
1) Инстантонные траектории — окружности в плоскости $(x_3, x_4)$ с радиусом $\frac{m}{\mu\beta}$, аналитическое выражение дано формулами (25) и (26).
2) Подавление производства пар — сильный градиент $\beta$ уменьшает $S_0$, усиливая рождение магнон-антимагнонных пар, аналогично эффекту Швингера в электрическом поле. Аналитическое выражение инстантонного стационарного действия дано в (30).
Пример графика на Рис. 1 для параметров $m = 1$, $\mu = 1$, $\beta = 0.5$, $n = 1$.

## 2.2 Локализованная неоднородность

Рассмотрим теперь магнитное поле вида $B(x) = B_0 \tanh(kx)$, проводим те же самые аналогии, только выражения будут менее тривиальными.
Градиент магнитного поля:

$$\partial_x B(x) = B_0 k \operatorname{sech}^2(kx)$$

приводит к эффективному электрическому полю:

$$E(x) = -\partial_x B(x) = -B_0 k \operatorname{sech}^2(kx),$$

где константа $-B_0 k$ обозначалась как $E_0$ во введении и как $E$ в [2]. Действие для Worldline инстантона запишется точно так же:

$$S = mv_s\sqrt{\int_0^1 \dot{x}^2 du} + i\mu\int_0^1 B(x)\dot{x}_4 du, \tag{32}$$

где $\dot{x}^2 = \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2$, $\mu$ — эффективный заряд магнона.
Уравнения Эйлера-Лагранжа (после варьирования):

$$\frac{d}{du}\left(\frac{m\dot{x}_3}{\sqrt{\dot{x}^2}}\right) = i\mu\partial_{x_3}B(x)\dot{x}_4, \tag{33}$$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{m\dot{x}_4}{\sqrt{\dot{x}^2}}\right) = i\mu\partial_{x_4}B(x)\dot{x}_3. \tag{34}$$

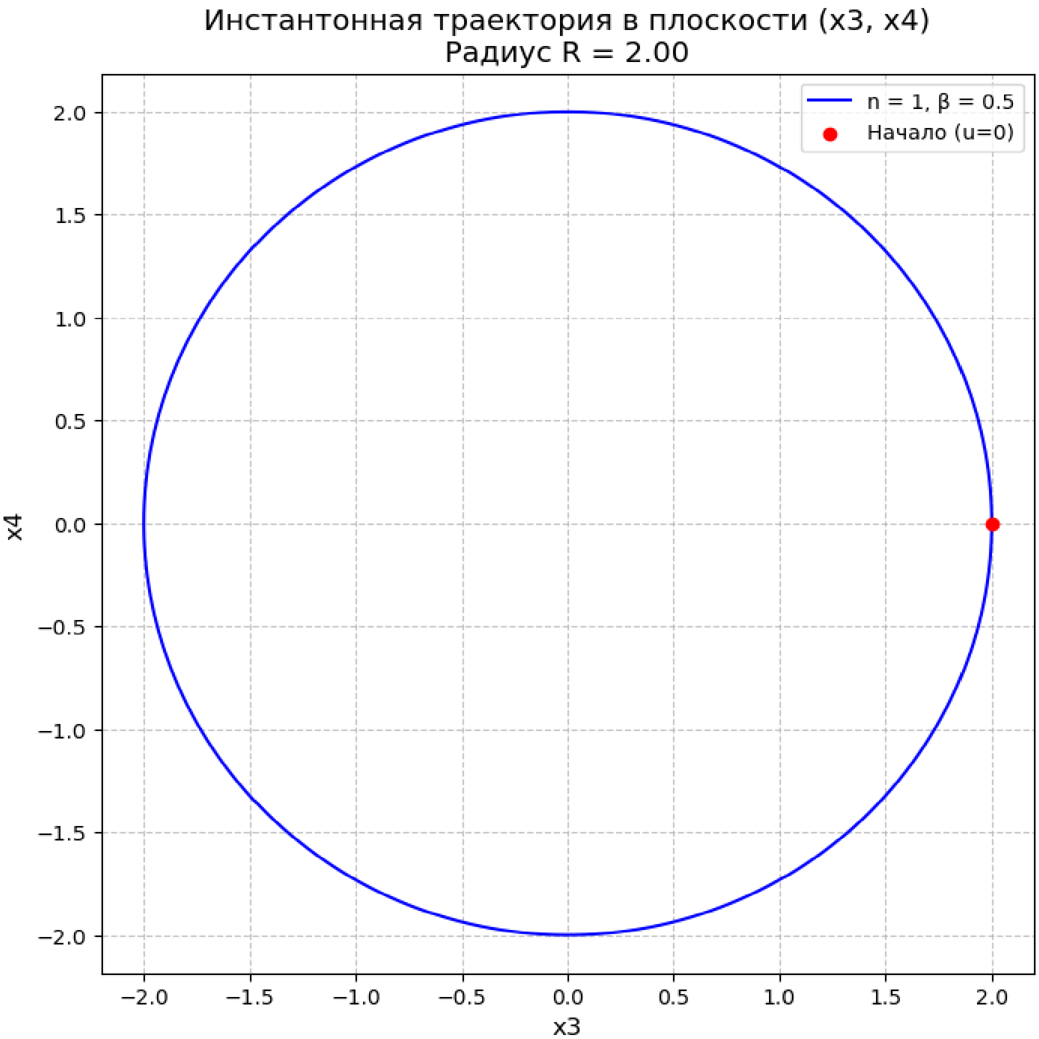


Рис. 1: Инстантонная траектория в виде окружности в плоскости $(x_3, x_4)$ с радиусом $R = \frac{m}{\mu\beta} = 2$.

Так как $B(x)$ зависит только от $x_3$, упрощаем:

$$\frac{\ddot{x}_3}{\sqrt{\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2}} = \frac{i\mu v_s}{m} \partial_{x_3} B(x) \dot{x}_4, \tag{35}$$

$$\frac{\ddot{x}_4}{\sqrt{\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2}} = -\frac{i\mu v_s}{m} \partial_{x_3} B(x) \dot{x}_3. \tag{36}$$

Теперь выполним требуемую подстановку $B(x) = B_0 \tanh(kx_3)$ (выбираем $x_3$ в качестве ведущей координаты). Введем обозначение $a = \sqrt{\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2} = \text{const}$ (условие стационарности). Уравнения (12) принимают вид:

$$\ddot{x}_3 = \frac{i\mu B_0 k a v_s}{m} \text{sech}^2(kx_3) \dot{x}_4, \tag{37}$$

$$\ddot{x}_4 = -\frac{i\mu B_0 k a v_s}{m} \text{sech}^2(kx_3) \dot{x}_3. \tag{38}$$

Другой вариант записи уравнений движения для инстантонов $x_3(u)$ и $x_4(u)$ в Евклидовом пространстве-времени:

$$\dot{x}_3 = av_s\sqrt{1 + \left(\frac{\mu B_0 \tanh(kx_3)}{m}\right)^2}, \quad \dot{x}_4 = -\frac{i\mu av_s}{m}B_0 \tanh(kx_3), \tag{39}$$

где под точкой подразумеваем производную: $\dot{x}_3 = \frac{dx_3}{du}$.
Решим эти уравнения по аналогии со случаем постоянного градиента магнитного поля. Введём параметр $\gamma = \frac{mk}{\mu B_0 v_s}$.
Сделаем замену переменных:

$$\dot{x}_3 = av_s \cos\theta(u), \quad \dot{x}_4 = av_s \sin\theta(u), \tag{40}$$

где $\theta(u)$ — угол, зависящий от $u$. Тогда:

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{\mu B_0 kav_s}{m}\mathrm{sech}^2(kx_3). \tag{41}$$

Откуда после обратной замены получим выражение для $x_3(u)$:

$$x_3(u) = \frac{1}{k}\mathrm{arcsinh}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}kau\right)\right). \tag{42}$$

Более компактное выражение:

$$x_3(u) = \frac{1}{k}\mathrm{arcsinh}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sin(2\pi nu)\right). \tag{43}$$

Аналогично для $x_4(u)$. Из уравнения для $\dot{x}_4$:

$$\dot{x}_4 = -\frac{av_s}{\gamma}\tanh(kx_3). \tag{44}$$

Подставляя $\tanh(kx_3) = \frac{\gamma\cos(2\pi nu)}{\sqrt{1+\gamma^2\cos^2(2\pi nu)}}$, получим следующее:

$$\dot{x}_4 = -\frac{av_s\gamma\cos(2\pi nu)}{\sqrt{1+\gamma^2\cos^2(2\pi nu)}}. \tag{45}$$

Производим интегрирование, получив предварительный ответ:

$$x_4(u) = -\frac{av_s}{\sqrt{1-\gamma^2}}\int\frac{\gamma\cos(2\pi nu)}{\sqrt{1+\gamma^2\cos^2(2\pi nu)}}du. \tag{46}$$

После замены $\sin\theta = \gamma\cos(2\pi n u)$ окончательное выражение:

$$x_4(u) = \frac{1}{k\sqrt{1-\gamma^2}}\arcsin\left(\gamma\cos(2\pi n u)\right). \tag{47}$$

Проведём проверку на условие периодичности. Для замкнутости траектории требуем условие $(x(u+1) = x(u))$, как и в случае постоянного градиента магнитного поля:

$$\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}kav_s = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Отсюда находим $a$:

$$a = \frac{2\pi n\gamma}{kv_s\sqrt{1-\gamma^2}}. \tag{48}$$

Теперь находим стационарное инстантонное действие $S_0$. Подставляем решения в действие:

$$S_0 = mav_s + i\mu\int_0^1 B(x)\dot{x}_4 du. \tag{49}$$

Снова разделим действие на два слагаемых для удобства. Первый член останется нетронутым, только подставим выражение для $a$ из (48):

$$ma = \frac{2\pi n m\gamma}{k\sqrt{1-\gamma^2}}. \tag{50}$$

Во втором члене вынесем за знак интеграла постоянные множители:

$$i\mu\int_0^1 B_0\tanh(kx_3)\dot{x}_4 du = i\mu B_0\int_0^1 \tanh(kx_3)\dot{x}_4 du. \tag{51}$$

Используя выражения $\dot{x}_4 = av_s\sin\theta(u)$ и $\tanh(kx_3) = \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sin\theta(u)$, получаем:

$$i\mu B_0 av_s\cdot\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\int_0^1\sin^2\theta(u)du = i\mu B_0 av_s\cdot\frac{\gamma}{2\sqrt{1-\gamma^2}}. \tag{52}$$

Итоговое действие запишется так:

$$S_0 = \frac{2\pi n m\gamma}{kv_s\sqrt{1-\gamma^2}} + i\mu B_0 a\cdot\frac{\gamma}{2v_s\sqrt{1-\gamma^2}}. \tag{53}$$

После упрощений получим окончательную формулу для стационарного действия $S_0$:

$$S_0 = n\frac{\pi m^2}{\mu B_0 v_s}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\gamma^2}}\right), \tag{54}$$

где $n \in \mathbb{Z}^{+}$.
Можем рассмотреть предельные случаи:
1. $\gamma \to 0$ (слабая неоднородность) приводит к тому, что $S_0 \to n\frac{\pi m^2}{\mu B_0 v_s}$, а этот результат совпадает с полученным для постоянного градиента магнитного поля.
2. $\gamma \to 1$ приводит к тому, что $S_0 \to \infty$, что означает полное подавление производства пар.
Если рассмотреть скорость производства пар:

$$\operatorname{Im}\Gamma \sim e^{-S_0},$$

то видим, что при $\gamma < 1$, пространственная неоднородность уменьшает $S_0$, увеличивая производство пар по сравнению с постоянным полем.

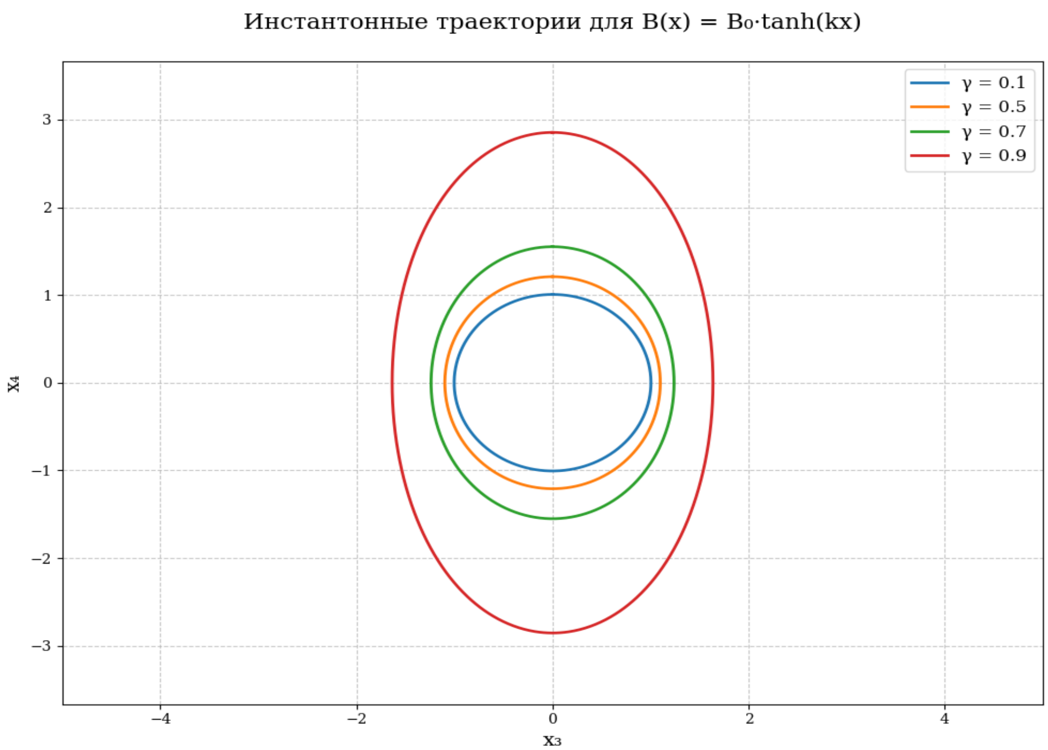


Рис. 2: Инстантонные траектории в виде овалов в плоскости $(x_3, x_4)$ с разными параметрами $\gamma$.

Видно на Рис. 2, что при $\gamma \to 0$ получаем практически окружность единичного радиуса, а при $\gamma \to 1 - 0$ траектория вытягивается вдоль оси $x_4$, оставаясь при этом замкнутой.
Таким образом, получены аналитические выражения для траекторий движения $x_3(u)$ и $x_4(u)$, формулы (43) и (47) соответственно. Аналитическое выражение для инстантонного действия даётся формулой (54).

# 3 Основные результаты

Пространственно неоднородный случай:
1. Постоянный градиент магнитного поля $B(x) = B_0 + (\partial_x B)x$:
а) Инстантонные траектории — окружности в плоскости $(x_3, x_4)$ с радиусом $\frac{m}{\mu\beta}$, аналитическое выражение дано формулами (25) и (26).
б) Подавление производства пар — сильный градиент $\beta$ уменьшает $S_0$, усиливая рождение магнон-антимагнонных пар, аналогично эффекту Швингера в электрическом поле. Аналитическое выражение инстантонного стационарного действия дано в (30).
2. Случай $B(x) = B_0 \tanh(kx)$:
а) $\gamma \to 0$ (слабая неоднородность) приводит к тому, что $S_0 \to n\frac{\pi m^2}{\mu B_0 v_s}$, а этот результат совпадает с полученным для постоянного градиента магнитного поля.
б) $\gamma \to 1$ приводит к тому, что $S_0 \to \infty$, что означает полное подавление производства пар.
При $\gamma < 1$, пространственная неоднородность уменьшает $S_0$, увеличивая производство пар по сравнению с постоянным полем. При $\gamma \to 0$ получаем практически окружность единичного радиуса, а при $\gamma \to 1 - 0$ траектория вытягивается вдоль оси $x_4$, оставаясь при этом замкнутой.
Аналитические выражения для траекторий движения $x_3(u)$ и $x_4(u)$ - формулы (43) и (47) соответственно. Аналитическое выражение для инстантонного действия даётся формулой (54).

# Список литературы


[1] Schwinger mechanism of magnon-antimagnon pair production on magnetic field inhomogeneities and the bosonic Klein effect, T. C. Adorno, S. P. Gavrilov, D. M. Gitman; arXiv:2310.20035v2 [cond-mat.mes-hall] 30 Jun 2024

[2] Worldline Instantons and Pair Production in Inhomogeneous Fields, Gerald V. Dunne, Christian Schubert; arXiv:hep-th/0507174v2 7 Nov 2005

[3] Pair production at strong coupling in weak external fields, Ian K. Affleck, Orlando Alvarez, Nicholas S. Manton; DOI: 10.1016/0550-3213(82)90455-2

[4] Matthew D. Shwartz, Quantum Field Theory and the Standard Model, University Printing House, Cambridge CB2 8BS, United Kingdom, 2014